L.S 15 novembre 1955	Mathématiques	$4^{ème}sc$
DEVOIR DE SYNTHESE N° 1		
Profs : Karray Nahla-kammoun Fatma- Riadh Ben Maafoud		
A.S 2011/2012	DATE 8/12/11	Durée 2h

EXERCICE N°1 :5pts

Sur la figure de l'annexe ; est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f dérivable et strictement décroissante sur$]0, +\infty[$. On sait que la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. La tangente à la courbe C_f au point B $(2, \frac{3}{2})$ passe par le point D (4, 0).

Par lectures graphiques

1) a) déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{0^+} f$

b) la fonction f admet-elle des points d'inflexions ? Justifier.

2) a) Justifier que la fonction f est une bijection de$]0, +\infty[$sur un intervalle J que l'on précisera.

b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f définie sur J. Déterminer $f^{-1}(\frac{3}{2})$ et $f^{-1}(2)$.

c) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et déterminer $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$

d) Déterminer sur quel ensemble f^{-1} est dérivable.

3) Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction f^{-1}.

4) Soit g la fonction définie sur$]0, +\infty[$par $g(x) = \frac{1}{x}$ et h la fonction définie sur$]0, +\infty[$par $h(x) = gof(x)$.

a) Vérifier que h est dérivable en 1 et déterminer h'(1).

b) Déterminer le sens de variation de h sur$]0, +\infty[$.

EXERCICE N°2 :5pts

On considère la suite (U_n) définie par $U_0=1$ et pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n ; on a $U_n > 0$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

b) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ; $U_n=\frac{1}{1+n}$.

4) On définie la suite (S_n) par $S_n=\sum_{k=0}^{n} U_k$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $S_{2n} - S_n \geq \frac{n}{2n+1}$; en déduire que la suite (S_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N°3 :5pts

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 2(1-\cos\theta)z + 1-\cos\theta = 0$; avec $\theta \in]0, \pi[$.

2) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

3) On pose $f(z) = 2z^3 - 2(1+i)z^2 + (1+2i)z - i$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire.

b) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M' e M'' d'affixes respectives $z' = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta + i\sin\theta)$; $z'' = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta - i\sin\theta)$.

a) Calculer $\left|z' - \frac{1}{2}\right|$ et $\left|z'' - \frac{1}{2}\right|$ en déduire que les points M' et M'' appartiennent à un même cercle que l'on caractérisera.

b) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = i$, $Z_B = 2z'$ et $Z_C = 2z''$. Déterminer θ pour que ABCO soit un parallélogramme.

EXERCICE N°4 :5pts

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. C_f la représentation graphique de f dar un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement ces limites.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x dans l'intervalle $]1, +\infty[$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Donner une équation cartésienne de la tangente Δ à la courbe C_f au point I d'abscisse 0.

e) Etudier la position relative de C_f et Δ.

f) Tracer C_f ainsi que la tangente en I.

g) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]\frac{3}{2}, 2[$ une solution unique α.

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 > 1$ et pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, $U_n \geq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in$ IN, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n - \alpha|$.

c) Montrer que pour tout $n \in$ IN, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |U_0 - \alpha|$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Feuille annexe

Nom et prénom : .... Classe :......................