

Exercice 1

1) l'ordre de la matrice $A \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est

a. 2×3

b. 3×2

c. 3×3

2) Soit la matrice $A \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors le système (S) associé à A est

$$\text{a. } \begin{cases} -x + 4y - 3z = -2 \\ y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} -x - 2y + 3z = -2 \\ y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

3) Le produit de la matrice suivant $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est :

a. $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c. $(-4 \quad -1 \quad 4)$

4) le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est

a. -3

b. -1

c. 3

5) L'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que D est inversible et donner sa matrice inverse D^{-1} .

2) Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel le système suivant : b. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Exercice 3

On donne par $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1- Calculer $A*B$ et $B*A$.

2- Calculer $C = A+B$ puis C^3 ; déduire C^4 et C^6

Exercice 4

On donne par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1- Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A$.
- 2- Montrer que A est inversible.
- 3- Déterminer alors la matrice inverse de A .

Exercice 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer A^2 et en déduire que $A^2 - A = 2I_3$ avec I_3 est la matrice identité.
- 2) Sans calculer le déterminant de la matrice A , prouver que A est inversible.
- 3) Déterminer La matrice inverse de A , qu'on notera A^{-1} .
- 4) a) Calculer le déterminant de A .
b) En utilisant la méthode de Cramer résoudre le système suivant $\begin{cases} y + z = -1 \\ x + z = -2 \\ x + y = -3 \end{cases}$

Exercice 6

Soit $M = \begin{pmatrix} a+3 & 5 & 3 \\ a & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) Pour quelle valeur de a la matrice M n'est pas inversible.
- 2) Dans la suite on prend $a = -1$
Calculer le déterminant de M et déduire que M est inversible.
- 3) Vérifier que la matrice inverse de $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- 4) Vérifier $M^3 - 7M^2 + 4M - I_3 = 0$ et En déduire la matrice inverse de M^{-1} à partir de M^2 ; M et I_3 .

Exercice 7

- 1) soit le système (S) $\begin{cases} 2x - 6y = -10 \\ -x + 3y + 2z = -3 \\ x + 5y - 4z = 15 \end{cases}$
 - a) Montrer que $(1, 2, -1)$ est une solution de (S).
 - b) Traduire le système (S) par une égalité matricielle de la forme $M^* X = N$
- 2) Calculer le déterminant de M . En déduire que M est inversible
- 3) soit $F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
 - a) Déterminer le produit de $M^* F$
 - b) En déduire la matrice inverse de M .

Exercice 8

Une usine fabrique chaque jour trois types de cartes d'ordinateur : le modèle I, le modèle B et le modèle M. Pour chaque modèle, on utilise des puces électroniques de types P_1 , P_2 et P_3 avec la répartition suivante :

Un certain jour, on utilise 588 puces P_1 , 630 puces P_2 et 470 puces P_3 .

On note x, y et z les nombres respectifs des cartes I, B et M fabriquées.

Puce \ modèle	I	B	M
P_1	5	2	7
P_2	3	8	6
P_3	3	4	5

- 1) Traduire les informations ci-dessus en un système (S) de trois équations à trois inconnues x, y et z.
- 2) a) Donner l'écriture matricielle du système(S). et Résoudre alors le système(S).
b) En déduire le nombre de cartes fabriquées de chaque modèle.

Exercice 9

On considère le système (S) :
$$\begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

- 1) Donner la matrice associée au système M
- 2) a) Montrer que $M^2 - M - 2I = 0$.
b) En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}
c) Résoudre alors le système (S).
- 3) Résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.

Exercice 10

Soit la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que A est inversible.
- 2) Calculer la matrice $B = A - I_3$ puis B^2 et B^3
- 3) En déduire B^n pour $n \geq 3$.

Exercice 11

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Vérifier que $B = A + 4I_3$.
- 2) Calculer $\det(A)$ et en déduire que A est inversible.
- 3) a) Calculer A^2 .
b) Vérifier que $A^2 + 5A = -4I_3$.
c) En déduire que $A(B + I_3) = -4I_3$ et déterminer la matrice inverse de A.

Exercice 12

On donne les matrices $K = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer le déterminant (K) et en déduire que K est inversible.
- 2) Calculer $K.L$ puis déduire K^{-1} .
- 3) Résoudre le système
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 3x + y + 3z = -1 \\ 5x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 13

On considère le système (S) :
$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 12 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ x + y + \frac{1}{2}z = 5 \end{cases}$$

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -20 \\ -5 & -4 & 14 \\ -6 & -4 & 16 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer déterminant (A). La matrice A est-elle inversible ? justifier votre réponse.
- 2) Calculer AxB . En déduire que $A^{-1} = \frac{1}{2}B$.
- 3) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système (S).